.E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option TA 1981

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent énoncer clairement les théorèmes utilisés, et que les démonstrations vagues ne seront pas prises en considération.*

On dit qu'une fonction f de R dans R (resp : de C dans C) est développable en série entière à l'origine s'il existe un intervalle ouvert non vide de centre O (resp : un disque ouvert non vide de centre O) sur lequel f est la somme d'une série entière; on admettra que si f est développable en série entière à l'origine avec $f(0)$ non nul, $1/f$ est développable en série entière à l'origine.

PARTIE 1

Soit f l'application de $I =]-2\pi, 2\pi[$ dans R définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \quad \text{et} \\ f(x) = \dfrac{x}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{x}{2} \quad \text{pour } x \text{ non nul.} \end{cases}$$

1° Montrer que f est une application paire, continue, admettant une dérivée continue sur I. Donner une expression de $f'(x)$.

2° Montrer que f est développable en série entière à l'origine. [On pourra écrire $f(x) = \cos \dfrac{x}{2} \Big/ \left(\sin \dfrac{x}{2} \Big/ \dfrac{x}{2} \right)$ pour x non nul.]

3° On pose $f(x) = B_0 - \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_p}{(2p)!} x^{2p}$ pour x voisin de 0. Calculer B_0, B_1 et B_2.

PARTIE 2

1° Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy' - y + y^2 + x^2/4 = 0$$

2° On suppose que x appartient à l'intervalle $J =]0, 2\pi[$. On effectue dans (E) le changement de fonction $y = f + u$. Déterminer l'équation différentielle (E_1) vérifiée par la fonction u. Montrer que la fonction nulle sur J est la seule solution de (E_1) définie sur J qui s'annule au moins une fois sur J.

3° On effectue dans (E_1) le changement de fonction $u = 1/v$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$(E_2) \quad xv' + v(1 - 2f) = 1$$

Résoudre (E_2) sur J.

4° En déduire que f est la seule solution de (E) définie et continûment dérivable sur I vérifiant : $f(0) = 1$.

5° Retrouver les coefficients B_0, B_1 et B_2 en cherchant une solution y de (E) développable en série entière à l'origine, et telle que $y(0) = 1$.

.../...

PARTIE 3

Posons $K =]-1, 0[\cup]0, 1[$; dans les questions suivantes, y est un élément de K.

1° Soit g l'application de R dans R, de période 2π, de variable t, telle que : $\forall t \in]-\pi, \pi]$, $g(t) = \cos(ty)$. g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

2° Déterminer les coefficients de Fourier de g.

3° Démontrer les formules suivantes :

(I) $$\operatorname{cotg}(\pi y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{n^2 - y^2}\right]$$

(II) $$\frac{1}{\sin(\pi y)} = \frac{1}{\pi y} + \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - y^2}$$

PARTIE 4

1° Montrer que l'on peut dériver terme à terme par rapport à y la série de la relation (I). En déduire un développement en série de $1/\sin^2(\pi y)$.

2° Décomposer en éléments simples dans R (Y) la fraction rationnelle :

$$\frac{2(n^2 + Y^2)}{(n^2 - Y^2)^2}$$

3° Démontrer la relation suivante :

(III) $$\frac{1}{\sin^2(\pi y)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y-n)^2}$$

(La notation $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ désigne $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p + \sum_{q=1}^{+\infty} u_{-q}$ si ces deux séries convergent.)

PARTIE 5

Posons $x = \pi y$ pour tout élément y de K.

1° Donner un développement en série de $f(2x)$ valable sur $]-\pi, \pi[$, en utilisant la relation (I).

2° Développer en série entière à l'origine la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$.

On précisera l'intervalle maximum de validité du développement.

3° On pose :

$$S_k(x) = 1 - \sum_{n=1}^{n=k} \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2} \quad \text{pour } k \text{ entier non nul.}$$

Développer $S_k(x)$ en série entière à l'origine.

.../...

4° On pose :

$$S(x) = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^{2p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} \right] x^{2p}$$

Montrer que le rayon de convergence de la série entière S est supérieur ou égal à π.

En utilisant la relation $|f(2x) - S(x)| \leqslant |f(2x) - S_k(x)| + |S_k(x) - S(x)|$ et deux limites pour k infini, prouver que : $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f(2x) = S(x)$.

5° Trouver une relation donnant les nombres $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de p et des nombres B_p, pour p entier non nul.

6° Calculer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Partie 6

1° Posons $D = \{ z \in C / |z| < 2\pi \}$. Soit F l'application de D dans C définie par :

$$\begin{cases} F(0) = 1 & \text{et} \\ F(z) = \dfrac{z}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{z}{2} = \dfrac{z \cos(z/2)}{2 \sin(z/2)} & \text{pour } z \text{ non nul.} \end{cases}$$

Montrer que F est développable en série entière à l'origine avec les mêmes coefficients que f.

2° Soit h l'application de R dans R définie par :

$$\begin{cases} h(0) = 1 & \text{et} \\ h(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{pour } x \text{ non nul.} \end{cases}$$

Déterminer en fonction des nombres B_p les coefficients du développement en série entière à l'origine de l'application h. [On pourra calculer $F(ix)$.]

XXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail